

Otra forma de demostrar el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

AUTORES: Allan Gen Palma y Joseph Azofeifa Moya

INSTITUCIÓN QUE REPRESENTA: UNED-UCR

CORREO ELECTRÓNICO:

allangen@costarricense.cr y joseph.azofeifa@emate.ucr.ac.cr

1. RESUMEN:

En esta ponencia se pretende presentar una metodología para la demostración de un límite trigonométrico.

La metodología: consiste en brindar ejemplos muy concretos que ayuden al estudiante a comprender algunos teoremas (propiedad arquimediana, teorema del encaje y otros) que se usan para la demostración de dicho límite. Mediante estos ejemplos se permite la apropiación del concepto y la comprensión de los Teoremas involucrados.

2. OBJETIVOS:

- a. Desarrollar una mejor comprensión del límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (límite cuando x tiende a cero de $\frac{\sin(x)}{x}$) para estudiantes universitarios en el área de cálculo Diferencial.
- b. Establecer una relación temática del concepto de límite (teorema del encaje) con la geometría (en especial la propiedad arquimediana) y

trigonometría para la demostración del límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (límite cuando x tiende a cero de $\sin(x)$ entre x).

3. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo pretende ayudar al estudiante lograr una mejor comprensión de la demostración del límite trigonométrico $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Como parte fundamental del trabajo, se utilizará la ayuda del computador como recurso de apoyo y la versatilidad del software disponible para obtener una idea geométrica del concepto y los diferentes pasos de la demostración. En los diferentes pasos de la demostración, se empleará como material de apoyo que procura responder a las necesidades propias del estudiante. Estos recursos a los que hacemos referencia consisten en detallar algunos de los argumentos empleados en la demostración. Todo lo anterior con el objetivo de establecer una relación temática y más concreta de los pasos que tradicionalmente se hacen.

4. MARCO REFERENCIAL

El estudio del cálculo diferencial en nuestro país por lo general tiene como punto de origen el nivel universitario, y en casos muy especiales, el nivel de secundaria, esto último como resultado de acogerse al programa MATEM de la Universidad de Costa Rica o por formar parte del Programa de Bachillerato Internacional. Con base en la experiencia adquirida al impartir diferentes modalidades del curso de cálculo diferencial, a nivel de secundaria y universitaria, entre otros aspectos se ha identificado en los estudiantes la falta de dominio en temas diversos, con el agravante de que el proceso de enseñanza tradicional en nuestro país no ofrece una solución de previo a que el estudiante avance

en sus cursos. Es decir, se asume que el estudiante tiene dominio y relaciona los conceptos propios de cada fase del proceso de enseñanza-aprendizaje, principalmente los adquiridos desde la secundaria; tal suposición no debe considerarse como válida, en especial cuando el porcentaje de estudiantes en esa situación es significativo.

En virtud de lo anterior, resulta importante plantear soluciones para que los estudiantes en esa condición logren asimilar los conceptos no aprendidos y relacionarlos con los conceptos de la fase del proceso de enseñanza a la cual se están enfrentando; sin que ello implique una significativa inversión de tiempo y de recursos disponibles tanto para el docente como para el alumno y a la vez que la interacción no genere frustración en ambas partes.

En adición a lo señalado, es importante señalar que el estudiante aún cuando presente deficiencias en sus conocimientos, es posible despertar en ellos su interés por los temas no aprendidos, incluso dentro del ámbito de nuevos temas con los que se relacionan; lo anterior tiene explicación dentro del contexto de “Inteligencias Múltiples” la cual plantea que “...La decisión pedagógica sobre la mejor manera de presentar un tema es muy importante. El interés de los estudiantes se puede despertar o apagar con gran facilidad...”, así mismo señala que “...Los temas poco familiares se suelen captar con más facilidad si establecemos analogías con otros temas que se conozcan o comprendan mejor...” (Gardner, 2000).

En la actualidad el docente puede incorporar dentro de sus metodologías de enseñanza en el aula, el uso de computadoras y software de uso común tales como Word, Excel, Power Point, entre otros, con el objetivo de propiciar un mayor interés de los estudiantes hacia la matemática y lograr una mayor comprensión de los temas con mayores recursos visuales.

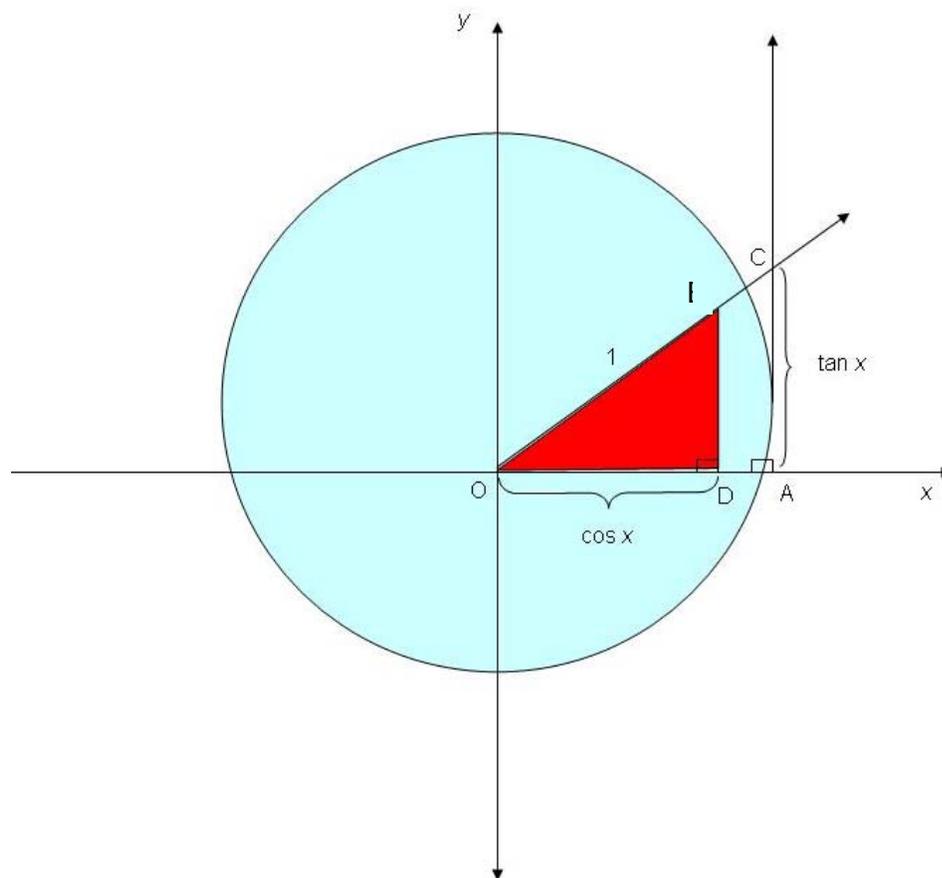
Cabe señalar que el espacio de aula, entendido éste como el lugar donde se realiza un proceso de enseñanza-aprendizaje, entre otros aspectos debe facilitar “...el acceso al material de interés en las diferentes actividades de aprendizaje...” (García y otros, 2001) para ello el uso de aplicaciones informáticas enriquece ese espacio y resulta ser más flexible en cuanto a disponibilidad, ya que puede disponer del mismo en forma permanente. Por otra parte, el incorporar este tipo de tecnología en el aula puede ser resuelta mediante varias opciones, una de ellas es el disponer de una plataforma informática tal y como la hace la UNED.

Por su parte, la enseñanza del cálculo diferencial con apoyo del computador ofrece la ventaja de relacionar aspectos que generalmente se tratan en forma analítica con distintos conceptos geométricos, aspecto que se vuelve sumamente tedioso explicarlo en el pizarrón con otros argumentos.

Además con la incorporación de recursos tecnológicos como la computadora la demostración del límite trigonométrico $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, cobra dinamismo al poder ubicar las figuras geométricas en lugares de la pantalla que favorecen la comparación, además el uso de la herramienta de **hipervínculo** permite que el profesor con anticipación prepare documentos que amplíen algún aspecto de la demostración que ayude a la comprensión.

5. LA DEMOSTRACIÓN PROPUESTA

a. Se Considera la siguiente circunferencia de radio 1, con ángulo $m\angle BOD = x$



b. De acuerdo a ella se tiene que:

$$\text{área } \triangle ODB < \text{área del sector circular de arco } \overset{\square}{AB} < \text{Área de } \triangle OAC$$

c. Se multiplica establecen las áreas.

$$\frac{\cos x \cdot \sin x}{2} < \frac{1^2 \cdot x}{2} < \frac{1 \cdot \tan x}{2}$$

d. Se multiplica la desigualdad por $\frac{2}{\sin x}$ y se obtiene.

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

e. Se aplica el recíproco. Recuerde que todos los valores son positivos.

$$\frac{1}{\cos x} < \frac{\sin x}{x} < \cos x$$

6. VALORACIÓN

a. Experiencia didáctica a nivel de secundaria

La experiencia didáctica a nivel de secundaria, con estudiantes de undécimo año que participaron del proyecto MATEM de la Universidad de Costa Rica, ha contribuido a que los estudiantes relacionen los diferentes conceptos empleados al demostrar dicho límite, tales como son las funciones trigonométricas, la circunferencia trigonométrica, los sectores circulares y las propiedades de las desigualdades entre otras; ya que tradicionalmente este límite es expuesto en los distintos textos de cálculo diferencial, en forma estática y asumiendo el dominio de ciertos conocimientos matemáticos considerados como básicos. Pero para el estudiante de secundaria se torna difícil el relacionar dichos conceptos sin el apoyo de ciertas explicaciones que le ayuden a concatenar y concretizar los diferentes conceptos involucrados en la demostración del límite en cuestión.

Es por esto que con la incorporación de una demostración gráfica con apoyo de la computadora, se puede realizar una exposición de la demostración de dicho límite y el proceso resulta más dinámico y se facilita el tratar los diferentes conceptos involucrados en esta prueba

b. Experiencia didáctica a nivel universitario

En cuanto a la experiencia didáctica a nivel universitario, se ha notado que los estudiantes en este nivel les es más fácil el relacionar los diferentes conceptos, a diferencia de lo que sucede en secundaria, pero con frecuencia han olvidado en mayor grado los distintos conceptos utilizados en la demostración del límite tratado. Una vez repasados estos conceptos se obtienen mejores resultados. Esta es la función de los hipervínculos.

Es comprensible que también todos los aspectos positivos de la experiencia didáctica en secundaria son aplicables al nivel universitario.

De ahí que podemos mencionar que los resultados que se han obtenido con la aplicación de esta metodología a nivel de secundaria y universitaria en la enseñanza del límite

trigonométrico $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, son:

- Mejor comprensión por parte de los estudiantes de este límite y de los teoremas involucrados en su demostración.
- Aumento de la motivación del educando y del educador, por eliminar la frustración de comprender y darse a entender.
- Se facilita la mediación pedagógica para el docente, ya que puede disponer de este recurso en el momento que lo requiera.
- Se aprovechan mejor los recursos tecnológicos a disposición.

7. CONCLUSIONES

A raíz de los resultados obtenidos a través del tiempo, con la exposición del límite

trigonométrico $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, llegamos a las siguientes conclusiones:

- Esta metodología puede emplearse en desarrollo de otros conceptos del cálculo diferencial y en general de la matemática que tradicionalmente son tratados en forma analítica y que pueden incluirse aspectos dinámicos y geométricos para una mejor comprensión de los mismos, claro esta tomando en cuenta las limitaciones que se presenten en los distintos casos.

- El empleo de esta metodología, permite explotar más las distintas inteligencias de cada individuo, lo cual favorece el proceso de enseñanza-aprendizaje.

8. RECOMENDACIONES

De la experiencia vivida se pueden desprender las siguientes recomendaciones:

- Implementar esta propuesta en la educación formal, con un especial interés en la educación a distancia en los cursos de cálculo diferencial en los cuales tenga que desarrollarse la demostración del límite tratado.
- Crear un banco con distintas demostraciones en la cual se emplee la misma metodología empleada en esta exposición, y que éste se encuentre a disposición de los estudiantes y docentes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Apostol Tom. (1965). **Matemática básica para técnicos**. Volumen I. Barcelona, España: Editorial Reverté.
- García Nidia. (2001). **Conocimiento, participación y cambio: espacio en el aula**. San José, Costa Rica: Editorial de la Universidad de Costa Rica.
- Garner, Howard. (2000). **La educación de la mente y el conocimiento de las disciplinas**. Barcelona, España: Editorial Paidós.
- Larson, Hostetler, Edwards. (1999). **Cálculo**. Volumen I sexta edición. México D.F. Editorial Mc Graw Hill.
- Piskunov, N. (1977). **Cálculo diferencial e integral**. Tomo I. Moscú, URSS: Editorial Mir.